07

第7章

ロットサイズ決定問題

段取りと在庫のトレードオフを強い定式化で解く

AMPLによる数理最適化

この章の内容

1. 容量制約付き複数品目ロットサイズ決定問題
2. 標準定式化
3. 施設配置定式化
4. 妥当不等式と切除平面法
5. 多段階ロットサイズ決定問題
6. エシェロン在庫を用いた定式化

7.1 容量制約付き複数品目ロットサイズ決定問題

段取り費用と在庫費用のトレードオフの下で、いつ・どれだけ生産するか？

問題の仮定

- 期によって変動する需要をもつ複数品目の生産計画
- 生産には段取り費用（固定）と変動費用がかかる
- 1単位の生産時間は1単位時間にスケーリング
- 各期の段取り時間＋生産時間には上限がある
- 初期在庫は0、持ち越した量に比例して在庫費用
- 段取り・変動・在庫費用の合計を最小化する

ポイント

まとめて作れば段取り費用は減るが在庫費用が増える。このトレードオフを最適化するのがロットサイズ決定問題である。

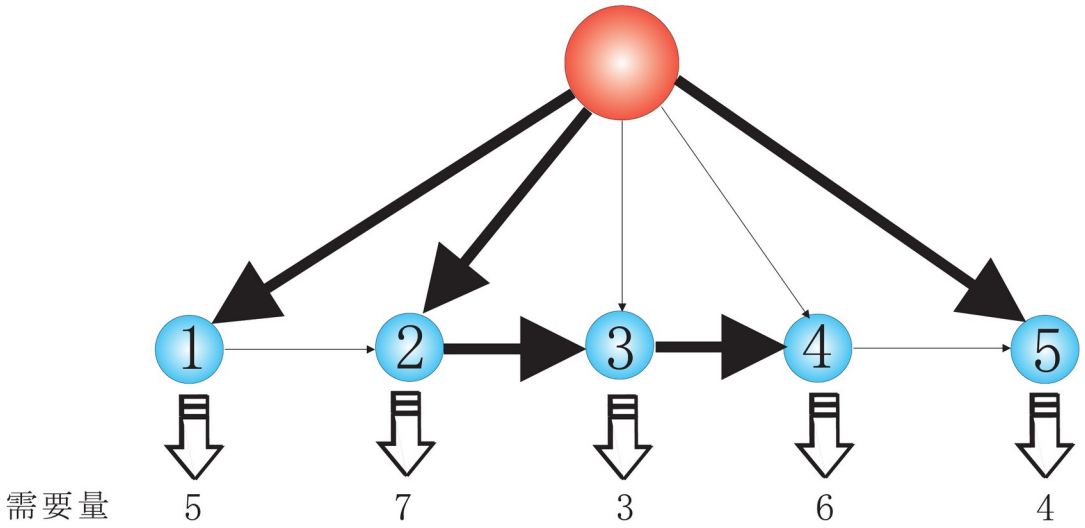
例題：1品目・5期の問題

在庫費用は $h_t = 1$、生産容量は十分大きく、段取り時間は 0 とする

期	1	2	3	4	5
段取り費用	3	3	3	3	3
生産変動費用	1	1	3	3	3
需要量	5	7	3	6	4

最適解は期 $1, 2, 5$ に生産し、総費用 57（段取り 9、変動 33、在庫 15）

固定費用つき最小費用流としての表現



例題のネットワークと最適解（太線）

- ロットサイズ決定は固定費用つき最小費用流問題と見なせる
- 生産の枝に段取り費用（固定費）がかかる
- 在庫の枝で次の期へ持ち越す
  - 最適値は 57

標準定式化の記号

パラメータ（期 t・品目 p）

- f[t,p]：段取り費用
- g[t,p]：段取り時間
- c[t,p]：生産変動費用
- h[t,p]：在庫費用、d[t,p]：需要量
- M[t]：期 t の生産時間の上限

変数

- I[t,p]：期 t の在庫量
- x[t,p]：期 t の生産量（＝生産時間）
- y[t,p]：段取りを行うとき 1 の 0-1 変数

標準定式化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \sum_{p \in P} \left(f_t^p y_t^p + c_t^p x_t^p + h_t^p I_t^p \right) & \\
\text{subject to} \quad & I_{t-1}^p + x_t^p - I_t^p = d_t^p & \forall p \in P, t = 1, \ldots, T \\
& \sum_{p \in P} x_t^p + \sum_{p \in P} g_t^p y_t^p \leq M_t & \forall t = 1, \ldots, T \\
& x_t^p \leq (M_t - g_t^p) y_t^p & \forall p \in P, t = 1, \ldots, T \\
& I_0^p = 0 & \forall p \in P \\
& x_t^p, I_t^p \geq 0, \ y_t^p \in \{0, 1\} & \forall p \in P, t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

- 1本目：在庫保存式（前期在庫＋生産 − 需要＝次期在庫）
- 2本目：生産時間＋段取り時間が上限 M[t] 以下
- 3本目：段取りしない期は生産量 0
- 4本目：初期在庫は 0

AMPLによる標準定式化

mils.mod

```
param T > 0 integer;         # 計画期間数
set Ts = 1..T;               # 期の集合
set P;                       # 品目の集合
param f {Ts,P} >= 0;  param g {Ts,P} >= 0;
param c {Ts,P} >= 0;  param d {Ts,P} >= 0;
param h {Ts,P} >= 0;  param M {Ts} >= 0;

var y {Ts,P} binary;   # 期 t に品目 p の段取りで 1
var x {Ts,P} >= 0;     # 期 t の品目 p の生産量
var I {0..T, P} >= 0;  # 期 t の終わりの在庫量

minimize Cost:
   sum {t in Ts, p in P}
      (f[t,p]*y[t,p] + c[t,p]*x[t,p] + h[t,p]*I[t,p]);
subject to Capacity {t in Ts}:
   sum {p in P} (g[t,p]*y[t,p] + x[t,p]) <= M[t];
subject to Balance {t in Ts, p in P}:
   I[t-1,p] + x[t,p] = I[t,p] + d[t,p];
subject to Setup {t in Ts, p in P}:
   x[t,p] <= (M[t] - g[t,p]) * y[t,p];
subject to InitInv {p in P}:
   I[0,p] = 0;
```

施設配置定式化

X[s,t,p]：期 t の需要のうち期 s (≤ t) の生産でまかなう量

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{s \le t} \sum_{p \in P} C^p_{st} X^p_{st} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{p \in P} f^p_t y^p_t \\
\text{subject to} \quad & \sum_{s=1}^{t} X^p_{st} = d^p_t && \forall p \in P, t = 1, \ldots, T \\
& \sum_{p \in P} \sum_{j \ge t} X^p_{tj} + \sum_{p \in P} g^p_t y^p_t \le M_t && \forall t = 1, \ldots, T \\
& X^p_{st} \le d^p_t y^p_s && \forall p \in P, s \le t \\
& X^p_{st} \ge 0,\ y^p_t \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

- C[s,t,p] = c[s,p] + Σ h[ℓ,p]（ℓ = s..t−1）
- 1本目：各期の需要を満たす
- 2本目：各期の生産時間の上限
- 3本目：段取りしない期には生産できない

AMPLによる施設配置定式化

mils_fl.mod

```
param T > 0 integer;
set Ts = 1..T;
set P;
set ST = {s in Ts, t in Ts: s <= t};  # s 期生産→t 期需要
param f {Ts,P} >= 0;  param g {Ts,P} >= 0;
param c {Ts,P} >= 0;  param d {Ts,P} >= 0;
param h {Ts,P} >= 0;  param M {Ts} >= 0;
# s 期に生産して t 期に使うときの単位あたり費用
param C {(s,t) in ST, p in P}
   = c[s,p] + sum {u in s..t-1} h[u,p];
var y {Ts,P} binary;
var X {ST,P} >= 0;

minimize Cost:
   sum {t in Ts, p in P} f[t,p]*y[t,p]
 + sum {(s,t) in ST, p in P} C[s,t,p] * X[s,t,p];
subject to Capacity {t in Ts}:
   sum {s in t..T, p in P} X[t,s,p]
 + sum {p in P} g[t,p]*y[t,p] <= M[t];
subject to Demand {t in Ts, p in P}:
   sum {s in 1..t} X[s,t,p] = d[t,p];
subject to Setup {(s,t) in ST, p in P}:
   X[s,t,p] <= d[t,p] * y[s,p];
```

定式化の強さを測る

relax_integrality = 1 で線形最適化緩和問題を解く（2品目・5期のランダムな例）

定式化	線形緩和の下界	整数最適値
標準定式化	550.67	1198
施設配置定式化	1198.00	1198

施設配置定式化の下界は整数最適値と一致し、分枝をまったく行わずに最適解が得られる

(S, ℓ) 不等式

$L = \{1, \ldots, \ell\}$、$S \subseteq L$、$D_{t\ell}$ は期 t から ℓ までの需要量の合計

$$\sum_{t \in S} x_t \le \sum_{t \in S} D_{t\ell}\, y_t + I_\ell \qquad \text{（妥当不等式）}$$

$$\sum_{t \in L \setminus S} x_t + \sum_{t \in S} D_{t\ell}\, y_t \ge D_{1\ell} \qquad (I_\ell \text{ を含まない形})$$

$$x_t \le d_t\, y_t + I_t \qquad (S = \{t\}, \ell = t \text{ の特殊形})$$

- 1品目の動的ロットサイズ決定問題の妥当不等式（Barany ら）
- 2本目は $x_t = d_t + I_t - I_{t-1}$ を代入して得る
- 特殊形：生産しない期は $I_t \ge 0$、生産する期は $I_t \ge x_t - d_t$

分離問題と切除平面法

- (S,ℓ) 不等式は本数が非常に多くなりうる
- 緩和解を破る不等式だけを逐次追加する
  - 切除平面法・分枝切除法
- 分離問題：緩和解 (x^*,y^*,I^*) を破る不等式を見つける
- ℓ を固定し、$D[t,\ell]\cdot y^*[t] < x^*[t]$ となる t を S に入れる
- 左辺が $D[1,\ell]$ 未満なら、その不等式で緩和解を切り落とせる

! ポイント

I_ℓ を含まない形の (S,ℓ) 不等式に対しては、分離問題がこのように簡単に解ける。

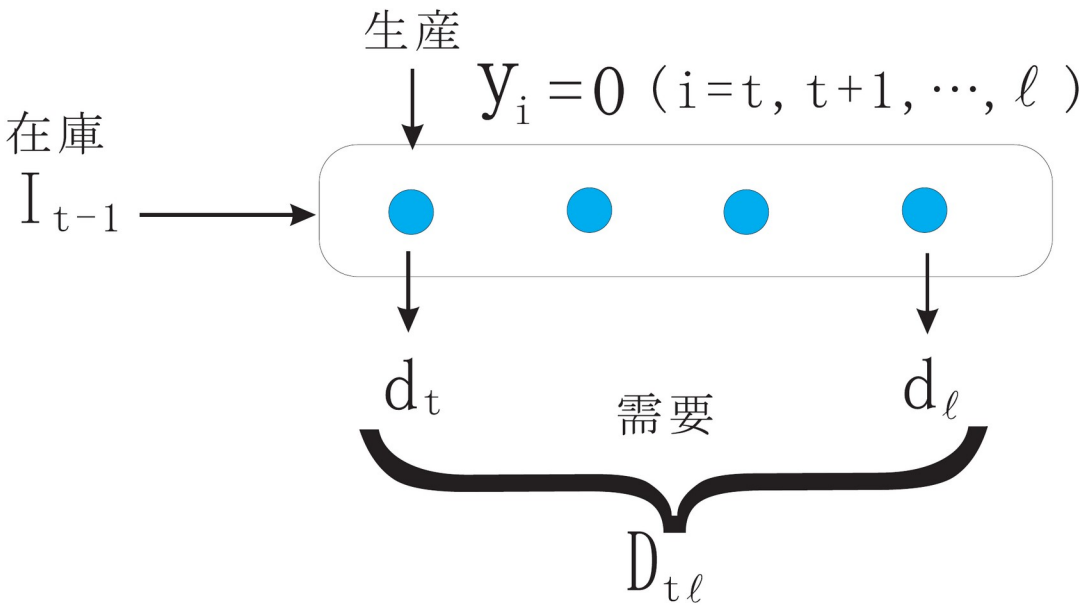
例題での切除平面法

y を [0,1] に緩和した例題に、緩和解を切り落とす (S,ℓ) 不等式を順に追加する

追加した不等式	最適値	y の値
なし（線形緩和）	51	(0.2, 0.4, 0, 0.24, 0.16)
$y1 \geq 1$ （$\ell=1$）	53.4	(1, 0.4, 0, 0.24, 0.16)
$x1 + 7\,y2 \geq 12$ （$\ell=2$）	54.48	(1, 1, 0, 0, 0.16)
$x1+x2+x3+x4 + 4\,y5 \geq 25$ （$\ell=5$）	57	(1, 1, 0, 0, 1)

最後の解を切り落とす不等式はもうなく、最適解 $x = (5, 16, 0, 0, 4)$ が得られる

もう1つの特殊形



妥当不等式導出の参考図

- $S = \{t, \ldots, \ell\}$ の場合から次式を得る
  - $I[t-1] \geq D[t,\ell] \cdot (1 - y[t] - \ldots - y[\ell])$
- 期 t〜ℓ に一度も生産しないなら、期 t−1 末の在庫で需要をまかなう
- $t = \ell$ のとき $I[t-1] \geq d[t] - d[t] \cdot y[t]$
- 事前に加えるだけで下界が劇的に改善

(S, ℓ) 不等式をモデルに追加する

mils.mod に追加

```
# 期 t から期 l までの品目 p の累積需要量
param D {t in Ts, l in Ts, p in P} = sum {u in t..l} d[u,p];

param nCut >= 0 integer, default 0;
set CUTS = 1..nCut;
set SS {CUTS} within Ts;          # k 番目の不等式の集合 S
param cutP {CUTS} symbolic in P;  # k 番目の不等式の品目 p
param cutL {CUTS} in Ts;          # k 番目の不等式の期 l

subject to SL {k in CUTS}:
   sum {t in 1..cutL[k]: t not in SS[k]} x[t,cutP[k]]
 + sum {t in SS[k]} D[t,cutL[k],cutP[k]] * y[t,cutP[k]]
   >= D[1,cutL[k],cutP[k]];
```

Python による切除平面法

amplpy

```
ampl.option["relax_integrality"] = 1
while True:
    ampl.solve(verbose=False)
    ys = ampl.get_variable("y").get_values().to_pandas()
    xs = ampl.get_variable("x").get_values().to_pandas()
    added = 0
    for p in P:
        for ell in Ts:
            lhs, S = 0, []
            for t in range(1, ell+1):
                yt = ys.loc[(t, p), "y.val"]
                xt = xs.loc[(t, p), "x.val"]
                if D[t, ell, p]*yt < xt:
                    S.append(t); lhs += D[t, ell, p]*yt
                else:
                    lhs += xt
            if lhs < D[1, ell, p] - 1.e-6 and S:
                nCut += 1; ampl.param["nCut"] = nCut
                ampl.get_set("SS")[nCut].set_values(S)
                ampl.param["cutP"] = {nCut: p}
                ampl.param["cutL"] = {nCut: ell}
                added += 1
    if added == 0: break
```

7.2 多段階ロットサイズ決定問題

部品展開表（BOM）を考慮して、複数段階の生産を同時に計画する

多段階モデルの新しい記号

1 **K, P_k**

資源（機械・ライン・工程）の集合と、資源 k で生産される品目の集合

2 **Parent_p**

品目 p から製造される親品目の集合。部品展開表の有向グラフは閉路を含まない

3 **φ[p,q]**

親品目 q を1単位製造するのに必要な品目 p の量（枝の重み）

4 **a[t,k,p], M[t,k], UB[t,p]**

資源 k の使用量と上限、品目 p の生産量の上限

単純な定式化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \sum_{p \in P} \left(f_t^p y_t^p + c_t^p x_t^p + h_t^p I_t^p \right) \\
\text{subject to} \quad & I_{t-1}^p + x_t^p = d_t^p + \sum_{q \in \text{Parent}_p} \phi_{pq} x_t^q + I_t^p && \forall p \in P; t = 1, \ldots, T \\
& \sum_{p \in P_k} a_t^{kp} x_t^p + \sum_{p \in P_k} g_t^p y_t^p \leq M_t^k && \forall k \in K; t = 1, \ldots, T \\
& x_t^p \leq U B_t^p y_t^p && \forall p \in P; t = 1, \ldots, T \\
& I_0^p = 0 && \forall p \in P \\
& x_t^p, I_t^p \geq 0, \ y_t^p \in \{0, 1\} && \forall p \in P; t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

- 在庫保存式に親品目の生産で使われる量が加わる
- 資源ごとの容量制約
- x と y を繋ぐ強化式
- 初期在庫は 0

AMPLによる単純な定式化（抜粋）

mils_standard.mod

```
set K;                          # 資源の集合
set PK {K} within P;            # 資源 k で生産される品目
set PHI within {P,P};           # 親子関係 (p,q)
param a {Ts,K,P} >= 0;          # 資源 k の使用量
param M {Ts,K} >= 0;            # 資源 k の使用可能量
param UB {Ts,P} >= 0;           # 生産量の上限
param phi {PHI} >= 0;           # q 1単位に必要な p の量

subject to Balance {t in Ts, p in P}:
   I[t-1,p] + x[t,p]
      = sum {q in P: (p,q) in PHI} phi[p,q] * x[t,q]
        + I[t,p] + d[t,p];
subject to Setup {t in Ts, p in P}:
   x[t,p] <= UB[t,p] * y[t,p];
subject to Resource {t in Ts, k in K}:
   sum {p in PK[k]} (a[t,k,p]*x[t,p] + g[t,p]*y[t,p])
      <= M[t,k];
```

- 親子関係を対の集合 PHI で宣言
- phi は関係のある組だけで定義（疎性）
- q in P: (p,q) in PHI で p を使う品目 q を合計

エシェロン在庫とエシェロン在庫費用

$\mathrm{Ancestor}_p$：品目 p から有向グラフを辿って到達できる品目（p 自身は含まない）

$$E_t^p = I_t^p + \sum_{q \in \mathrm{Ancestor}_p} \rho_{pq} I_t^q \quad \text{（エシェロン在庫量）}$$

$$H_t^p = h_t^p - \sum_{q \in \mathrm{Child}_p} h_t^q \phi_{qp} \quad \text{（エシェロン在庫費用）}$$

- ρ[p,q]：先祖 q を1単位生産するのに必要な品目 p の量
- E は自分と先祖の品目の在庫量を合わせたもの
- Child_p：品目 p を製造するのに必要な品目の集合

エシェロン在庫を用いた定式化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \sum_{p \in P} \left(f_t^p y_t^p + c_t^p x_t^p + H_t^p E_t^p \right) \\
\text{subject to} \quad & E_{t-1}^p + x_t^p - E_t^p = d_t^p + \sum_{q \in \mathrm{Ancestor}_p} \rho_{pq} d_t^q && \forall p \in P; t = 1, \ldots, T \\
& \sum_{p \in P_k} a_t^{kp} x_t^p + \sum_{p \in P_k} g_t^p y_t^p \le M_t^k && \forall k \in K; t = 1, \ldots, T \\
& E_t^p \ge \sum_{q \in \mathrm{Parent}_p} \phi_{pq} E_t^q && \forall p \in P; t = 1, \ldots, T \\
& x_t^p \le U B_t^p y_t^p && \forall p \in P; t = 1, \ldots, T \\
& E_0^p = 0,\ x_t^p, E_t^p \ge 0,\ y_t^p \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

- 保存式が単一段階と同じ構造になる
- 施設配置定式化や妥当不等式が適用可能
- E は親品目の E の合計以上（Afentakis ら）

AMPLによるエシェロン定式化（抜粋）

mils_echelon.mod

```
set RHO within {P,P};         # 先祖関係
param rho {RHO} >= 0;
# エシェロン在庫費用
param H {t in Ts, p in P}
   = h[t,p] - sum {q in P: (q,p) in PHI} h[t,q] * phi[q,p];
# 品目 p のエシェロン需要量
param dsum {t in Ts, p in P}
   = d[t,p] + sum {q in P: (p,q) in RHO} rho[p,q] * d[t,q];
var E {0..T, P} >= 0;         # エシェロン在庫量

minimize Cost:
   sum {t in Ts, p in P}
      (f[t,p]*y[t,p] + c[t,p]*x[t,p] + H[t,p]*E[t,p]);
subject to Balance {t in Ts, p in P}:
   E[t-1,p] + x[t,p] = E[t,p] + dsum[t,p];
subject to InitInv {p in P}:
   E[0,p] = 0;
subject to Echelon {t in Ts, p in P}:
   E[t,p] >= sum {q in P: (p,q) in PHI} phi[p,q] * E[t,q];
```

- H と dsum を計算されるパラメータで定義
- 数式とそのまま対応し読み違えにくい
- Setup・Resource は単純な定式化と同じ

2つの多段階定式化

単純な定式化

- 変数は在庫量 I
- 保存式に親品目の生産量が入る
- 段階間の結合が保存式に現れる

エシェロン在庫を用いた定式化

- 変数はエシェロン在庫量 E
- 保存式は単一段階と同じ構造
- 強い定式化・妥当不等式を適用可能
  - 最適値は単純な定式化と一致

まとめ

- ✓ ロットサイズ決定は固定費用つき最小費用流問題と見なせる
- ✓ 施設配置定式化は線形緩和の下界を整数最適値まで強化する
- ✓ (S,ℓ) 不等式を切除平面法で追加しても同じ強さが得られる
- ✓ AMPLでは計算されるパラメータで費用や累積需要を定義する
- ✓ 多段階問題はエシェロン在庫で単一段階と同じ構造になる